

交通网络最优安全路径选择模型与算法

苏兵^{1,2}, 徐寅峰^{1,3}, 肖鹏^{1,3}

(1. 西安交通大学管理学院, 710049, 西安; 2. 西安工业大学经济管理学院, 710032, 西安;
3. 西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对交通网络任意路段均可能发生中断的最小损失路径选择问题, 提出交通网络最优安全路径选择模型, 并设计了2种不同网络结构下最优安全路径选择算法. 首先用模型计算任意一条路径上每条边中断后产生的从起点到终点最短替代路径长度的最大值, 然后选择一条最短替代路径长度最大值最小且自身长度最小的路径. 在网络中, 当最短路径删除后该网络依然连通时, 最优安全路径问题转化为最短路径问题, 其计算复杂度为 $O(n^2)$; 当最短路径删除后该网络不再连通时, 最优安全路径问题转化为最小最大问题, 其计算复杂度为 $O(mn)$, 且仅与网络中节点和边的数量有关. 最后, 结合交通网络的实际情况对最优安全路径进行了算例分析.

关键词: 交通网络; 最优安全路径; 路径选择

中图分类号: TP393 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)04-0395-04

Optimal Safety Path Model and Algorithm in Transportation Networks

SU Bing^{1,2}, XU Yinfeng^{1,3}, XIAO Peng^{1,3}

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. School of Economics and Management, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China; 3. The State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: An optimal safety path model is presented for finding a new optimal path between two given nodes to reduce the inefficiency caused by the failure of an edge. The optimal safety path model computes the maximum length among all the shortest replacement paths between two given nodes produced by any edge's removal along a path, and then chooses the path whose maximum length with the shortest replacement path is minimum and whose length is minimized for all possible paths. Algorithms for computing the optimal safety path in two different network structures are proposed. In one case, the problem is the same as the shortest path problem and can be computed in $O(n^2)$ time; and in another case, the problem can be converted to a min-max problem and the optimal safety path can be computed in $O(mn)$ time by a labeling algorithm, where n and m denote the number of nodes and edges in the graph, respectively. Several numeral examples are given and the algorithms are validated.

Keywords: transportation network; optimal safety path; paths selecting

随着现代交通经济的快速发展和汽车保有量的高速增长, 居民在出行或运输过程中遇到的交通网络拥塞、不畅等现象日益突出, 给出行者造成诸多不便, 并带来了巨大的经济损失. 由于交通堵塞具有不

可预知性, 出行者对堵塞出现的时间和位置无法判断, 因此如何选择一条能够尽可能降低堵塞损失的路径, 是一件很有意义的事. 截至目前, 相关研究主要有二个方面的内容, 一是最短路径上的关键边问

题^[1-6]和最长绕行路径关键边问题及其算法^[7-9],另一是不完全信息下的实时关键边^[10]和关键路径问题及其算法^[11],这些内容均假设道路中断发生在最短路径上,且仅对最短路径上边(点)的重要度进行了度量.如果选择最短路径作为行走路径,当堵塞发生在最短路径关键边之时,出行者将遭受最大损失.实际上,在交通网络的某一起讫点对之间存在多条路径,一条好的路径是当任意路段发生中断时,出行者遭受的损失最小.

综上,本文提出了最优安全路径选择模型,以及不同网络结构下最优安全路径的计算方法.

1 最优安全路径选择模型及相关定义

给定一个2边连通无向网络图 $G(V, E)$, G 中有 n 个节点和 m 条边,若 s 为出发节点, t 为目标节点,则 $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V\}$ 为边的集合, E 中 e_{ij} 的权为正实数 $w(e_{ij})$. $\mathcal{P} = \{P_G(s, t)\}$ 为 s 到 t 的所有路径集合, $d_G(s, t)$ 为 $\mathcal{P}$ 中路径 $P_G(s, t)$ 的长度,且 s 到 t 只有一条最短路径.假设网络上只发生了一次堵塞,且堵塞的位置不确定,出行者应制定何种路径选择方案可使得堵塞带来的影响最小且路径长度尽可能小?为了便于讨论,给出如下定义.

定义1 G 中路径 $P_G(s, t)$ 的关于边 e 的最短替代路径 $P_{G-e}(s, t)$ 是指,边 e 发生中断时在图 $G-e$ 中从 s 到 t 的最短路径,令 $d_{G-e}(s, t)$ 为 $P_{G-e}(s, t)$ 的长度.

定义2 G 中路径 $P_G(s, t)$ 上的关键边 e' 是指,对于 $P_G(s, t)$ 上所有边均满足 $d_{G-e'}(s, t) \geq d_{G-e}(s, t)$ 的边,令 $d_{G-e'}(s, t)$ 为 $P_{G-e'}(s, t)$ 的长度.

定义3 安全路径 $P_G^*(s, t)$ 是指,对于 $\mathcal{P}$ 中所有路径均满足 $d_{G-e'}(s, t) \leq d_{G-e}(s, t)$ 的路径,其中 e^* 和 e' 为 G 中路径 $P_G^*(s, t)$ 和 $P_G(s, t)$ 的关键边.

从安全路径的定义可知,在计算出 G 中每一条边 e 中断后产生的,从 s 到 t 的最短路径 $P_{G-e}(s, t)$ 长度的基础上,安全路径问题可转化为最小最大优化问题,即

$$P_G^*(s, t) = \min_{P_G(s, t) \in \mathcal{P}} \{ \max_{e \in P_G(s, t)} \{d_{G-e}(s, t)\} \}$$

由于 G 中任意起讫点对之间可能存在多条安全路径,因此出行者需要在安全路径集合中选择一条长度最短的作为最优安全路径.

定义4 最优安全路径 $P_{\mathcal{G}}^*(s, t)$ 是从 s 到 t 的安全路径集合 $\{P_G^*(s, t)\}$ 中长度最小的路径.

2 最优安全路径的特征

在无任何堵塞发生时,令 $P'_G(s, t)$ 为 G 中从 s

到 t 的最短路径,其长度为 $d'_G(s, t)$,若 $\{e_p\}$ 是 $P'_G(s, t)$ 上边的集合, $\{e_q\} = E - \{e_p\}$ 是 G 中 $\{e_p\}$ 之外边的集合,则 $P'_G(s, t)$ 的最短替代路径集合是,删除了 $P'_G(s, t)$ 上的任意一条边 e_p 之后,在 $G-e_p$ 中从 s 到 t 的最短路径 $P'_{G-e_p}(s, t)$.

引理1 当 $G-\{e_p\}$ 为连通图时,从 s 到 t 的最优安全路径就是 $G-\{e_p\}$ 中从 s 到 t 的最短路径, $\{e_p\}$ 是 G 中从 s 到 t 的最短路径 $P'_G(s, t)$ 上边的集合.

证明 只有当 G 中从 s 到 t 最短路径上的边 e_p 发生中断时,才会增加 $G-e_p$ 中从 s 到 t 最短路径的长度,即当 $e_p \in P'_G(s, t)$ 时,从 G 中删除 e_p 所产生的最短替代路径 $P_{G-e_p}(s, t)$ 的长度均大于等于 $P'_G(s, t)$ 的长度.因为 $e_q \notin P'_G(s, t)$,则从 G 中删除 e_q 所产生的 $P_G(s, t)$ 的最短替代路径 $P_{G-e_q}(s, t)$ 的长度就等于 $P'_G(s, t)$ 的长度;又因为 G 中只有一条最短路径,当 $G-\{e_p\}$ 为连通图时, $G-\{e_p\}$ 中所有从 s 到 t 的路径都是安全路径,所以最优安全路径是安全路径集合中具有最小长度的路径.证毕.

3 最优安全路径的计算与算法复杂度分析

在多数情形下, $G-\{e_p\}$ 不是连通图,所以用引理1无法计算出最优安全路径.

对于每一条边 $e_q \notin P'_G(s, t)$,从 G 中删除 e_q 之后所产生的 $G-e_q$ 的最短路径 $P_{G-e_q}(s, t)$ 就是 G 中的最短路径 $P'_G(s, t)$,因此对任意的 e_q 都有 $d_{G-e_q}(s, t) = d'_{G-e_q}(s, t)$;对于每一条边 $e_p \in P'_G(s, t)$,从 G 中删除 e_p 之后所产生的最短路径 $P'_{G-e_p}(s, t)$ 的长度大于或等于原有路径长度,如果用传统的DIJKSTRA^[12]算法依次从 G 中删除 e_p ,可以得到所有 $P_{G-e_p}(s, t)$ 和 $d_{G-e_p}(s, t)$,但这种算法的复杂度 $O(n^3)$ 比较高.

3.1 最短路径上边中断后最短替代路径算法

算法1 首先生成以 s, t 为根节点的最短路径树 $P_G^T(s), P_G^T(t)$,如果从 s 到 t 的最短路径上的边 e_p 中断,则点集 V 被分割为2个子点集 M_{e_p} 和 N_{e_p} (如图1所示),其中 $s \in N_{e_p}, t \in M_{e_p}$,且有 $M_{e_p} \cap N_{e_p} = \emptyset$.

令 E_{e_p} 为连接 M_{e_p} 和 N_{e_p} 中点的边集合,则有 $E_{e_p} = \{e = (x, y) \in E - e_p \mid x \in N_{e_p}, y \in M_{e_p}\}$ 边 e_p 中断后的最短路径 $P'_{G-e_p}(s, t)$ 的路长为

$$d'_{G-e_p}(s, t) = \min_{(x, y) \in E_{e_p}, x \in N_{e_p}, y \in M_{e_p}} \{d_{G-e_p}(s, x) + \omega(x, y) + d_{G-e_p}(y, t)\}$$

其中 $\omega(x, y)$ 为边 $e_i = (x, y)$ 的权重.

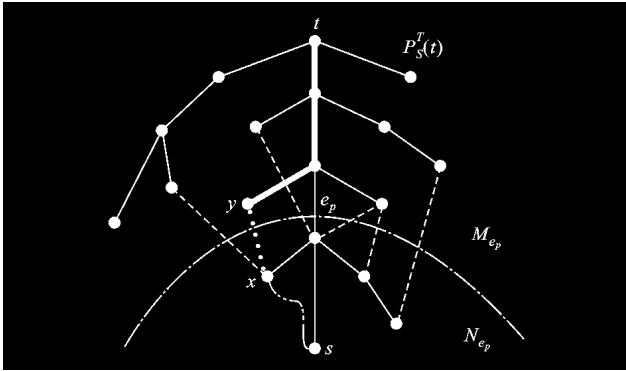
当 $x \in N_{e_p}, y \in M_{e_p}$, 由于边 e_p 不位于从 s 到 x 的最短路径上(否则有 $x \in M_{e_p}$, 与 $x \in N_{e_p}$ 矛盾), 因此边 e_p 中断并不影响从 s 到 x 及从 y 到 t 的最短路径, 则有

$$\begin{aligned} d_{G_{e_p}}(s, x) &= d_G(s, x) \\ d_{G_{e_p}}(y, t) &= d_G(y, t) \end{aligned}$$

那么, 最短路径 $P'_{G_{e_p}}(s, t)$ 的长度为

$$d'_{G_{e_p}}(s, t) = \min_{(x, y) \in E_{e_p}, x \in N_{e_p}, y \in M_{e_p}} \{d_G(s, x) + \omega(x, y) + d_G(y, t)\}$$

由于在 $E_{e_p} = \{e = (x, y) \in E - e_p \mid x \in N_{e_p}, y \in M_{e_p}\}$ 中有 $O(m)$ 条边, 计算每一条边 e_p 在删除后从 s 到 t 的最短路径的长度 $d'_{G_{e_p}}(s, t)$, 需要经过 $O(m)$ 次比较, 而从 s 到 t 的最短路径上共有 $O(n)$ 条边 e_p , 因此从 s 到 t 最短路径上所有边的 $d'_{G_{e_p}}(s, t)$ 的计算时间为 $O(mn)$.



点虚线是连接边 $e = (x, y)$; 双点虚线是从 s 到 x 的最短路径

图1 删除边 e_p 之后点集 V 分割为 2 个子点集 M_{e_p}, N_{e_p} 的示意图

3.2 最优安全路径算法

算法 2 最优安全路径算法及其步骤如下。

步骤 1: 用 DIJKSTRA 算法生成以 s, t 为根节点的最短路径树 $P^T_s(s), P^T_s(t)$, 以及 G 中的最短路径 $P'_G(s, t)$ 和 $d'_G(s, t)$ 。

步骤 2: 从 G 中删除 $P'_G(s, t)$ 上所有的边 $\{e_p\}$, 并用 DIJKSTRA 算法输出 $G - \{e_p\}$ 中的最短路径, 否则下转步骤 3。

步骤 3: 用算法 1 求出每一条边 $e_p \in P'_G(s, t)$ 删除后的最短路径 $P'_{G_{e_p}}(s, t)$ 和 $d'_{G_{e_p}}(s, t)$ 。

步骤 4: 对 G 中每一条边 $e_p \in P'_{G_{e_p}}(s, t)$ 赋予一个新的权重 $w'(e_p)$, 并令 $w'(e_p) = d'_{G_{e_p}}(s, t)$, 再对每一条边 $e_q \notin P'_{G_{e_p}}(s, t)$ 赋予一个新的权重 $w'(e_q)$, 并令 $w'(e_q) = d'_G(s, t)$ 。

通过步骤 4, 由 G 可以得到一个新图 $G' = (V, E)$, G' 中的每一条边 $e_{ij} \in E$ 的权重为 $w'(e_{ij})$ 。注意:

$$w'(e_{ij}) \neq w(e_{ij}).$$

步骤 5: 令 T 表示节点 v_j 的临时标号, W 表示节点 v_j 的永久标号, 又令 $S_i = \{s\}, \bar{S} = \{v_j\}$ ($\bar{S}$ 表示 s 相邻节点的集合), 并且

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= 0 \\ T(v_j) &= +\infty \quad v_j \in \bar{S} \end{aligned} \right\}$$

步骤 6: 如果 $t \in S_i$, 则下转步骤 9, 否则下转步骤 7。

步骤 7: 检查与 v_i 相连边 $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 的权重 $w'(e_{ij})$, 其中 $v_i \in S_i, v_j \in \bar{S}$, 如果 $T(v_j) \geq \max\{W(v_i), w'(e_{ij})\}$, 则把 $T(v_j)$ 修改为 $T(v_j) = \max\{W(v_i), w'(e_{ij})\}$, 否则下转步骤 8。

步骤 8: 检查每一个 $T(v_j)$, 且令 $T(v_{j_i}) = \min_{v_j \notin S_i} \{T(v_j)\}$, 即点 v_{j_i} 是所有 T 标号值中最小的点, 并将 v_{j_i} 的临时标号 T 更新为永久标号 W , 又令 $W(v_{j_i}) = T(v_{j_i}), S_{i+1} = S_i \cup \{v_{j_i}\}, i = i + 1$, 然后下转步骤 6。步骤 5~步骤 8 将在 $G' = (V, E)$ 中运行。

步骤 9: 从 G' 中删掉 $w'(e_{ij}) > W(t)$ 的边的集合 $E' = \{e_{ij}\}$, 然后用 DIJKSTRA 算法输出 $G - E'$ 中的最短路径, 算法终止。

由最优安全路径的定义和性质可知, 算法 2 可以计算出从 s 到 t 的最优安全路径。

3.3 算法 2 时间复杂度分析

对于节点数为 n 且边数为 m 的 2 边连通无向网络 G , 算法 2 在步骤 1、步骤 2 使用了 DIJKSTRA 算法, 因此时间复杂度为 $O(n^2)$ 。算法 2 在步骤 3 使用了算法 1 的计算次数为 $O(mn)$, 在步骤 4 的计算次数为 $O(m)$, 在步骤 5~步骤 8 (为一循环) 的计算次数为 $O(n^2)$, 在步骤 9 的计算次数为 $O(n^2)$, 因此算法 2 的时间复杂度为 $O(mn)$ 。

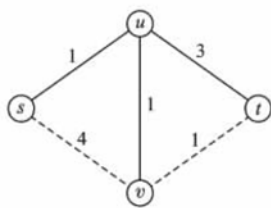
由 3.2 节的分析可以得到如下定理。

定理 1 节点数为 n 且边数为 m 的 2 边连通无向网络 G , 如果 $G - \{e_p\}$ 是连通图, 算法 2 可在 $O(n^2)$ 时间内计算出最优安全路径 $P^*_{SG}(s, t)$; 如果 $G - \{e_p\}$ 不是连通图, 算法 2 可在 $O(mn)$ 时间内计算出最优安全路径 $P^*_{SG}(s, t)$ 。

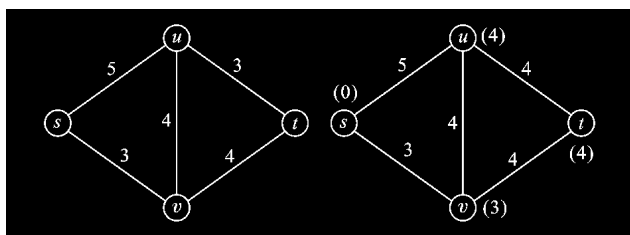
4 算例分析

以柏林市区局部地图为例, G 中的最优安全路径 $P^*_{SG}(s, t)$ 不是最短路径 $P'_G(s, t)$ 如图 2 所示。在图 2b 中, 最短路径为 $s \rightarrow v \rightarrow t$, 如果将最短路径删除, 则图 2b 不为连通图。通过算法 2 的步骤 1~步骤 3, 计算 G 中每一条边 $e \in E$ 的权 $w'(e)$, 从而得到 G' ,

如图2c所示,在 G' 中通过算法2的步骤5~步骤8,对 v_j 进行标号,再用步骤9求得的结果如图2b中虚线所示。



(a)柏林市局部地图 (b)柏林市局部地图抽象网络

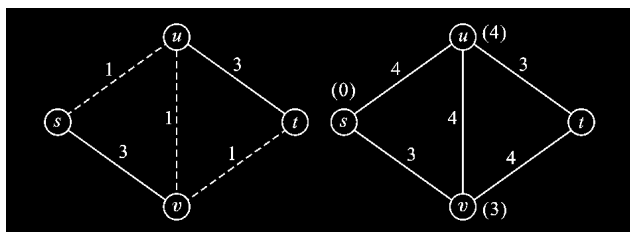


(c)由2b中的 G 得到的 G' (d)对 G' 中节点标号

括号内数字表示对 v_j 的标号;虚线为 $P_{SG}^*(s, t)$

图2 G 中的最优安全路径 P_{SG}^* 不是最短路径

在某些情形下,最优安全路径 $P_{SG}^*(s, t)$ 就是 G 中最短路径 $P'_G(s, t)$ 。如果柏林市区局部地图发生变化, s 到 v 的路段(边)权重减至3,如图3a所示,则最优安全路径 $P_{SG}^*(s, t)$ 就是最短路径 $P'_G(s, t)$,标号过程如图3所示。



(a) G

(b) G'

括号内数字表示对 v_j 的标号;虚线为 $P_{SG}^*(s, t)$

图3 G 中的最优安全路径 P_{SG}^* 不是最短路径 $P'_G(s, t)$

5 结束语

本文结合交通网络的实际情况,针对网络中任意一条路径均可能中断的情形提出了最小损失路径选择问题,给出了安全路径和最优安全路径选择模型和定义,并设计了求解最优安全路径的计算方法。最优安全路径问题可在2种不同的网络结构下求解,一种是将最优安全路径问题作为最短路径问题

进行计算,算法的时间复杂度为 $O(n^2)$;另一种是将最优安全路径问题转化为最小最大优化问题计算。本文还设计了求解问题的标号法,并证明了该方法的时间复杂度为 $O(mn)$ 。最后,通过算例揭示了最优安全路径的不同情形。今后需要继续深入研究的内容主要包括,制定堵塞发生在节点上的路径选择方案等。

参考文献:

- [1] CORLEY H W, SHA D Y. Most vital links and nodes in weighted networks [J]. Operations Research Letters, 1982, 1(4):157-161.
- [2] MALIK K, MITTAL A K, GUPTA S K. The k most vital arcs in the shortest path problem [J]. Operations Research Letters, 1989, 8(8):223-227.
- [3] NARDELLI E, PROIETTI G, WIDMAYER P. A faster computation of the most vital edge of a shortest path between two nodes [J]. Information Processing Letters, 2001, 79(2):81-85.
- [4] NARDELLI E, PROIETTI G, WIDMAYER P. Finding the most vital node of a shortest path [J]. Theoretical Computer Science, 2003, 296(1):167-177.
- [5] 李引珍,郭耀煌. 交通运输网络最短路径关键边问题研究 [J]. 中国管理科学, 2004, 12(4):69-73.
LI Yinzheng, GUO Yaohuang. Study on vital edges of shortest paths in traffic and transportation networks [J]. Chinese Journal of Management Science, 2004, 12(4):69-73.
- [6] BHOSLE A M. Improved algorithms for replacement paths problems in restricted graphs [J]. Operations Research Letters, 2005, 33(5):459-466.
- [7] NARDELLI E, PROIETTI G, WIDMAYER P. Finding the detour critical edge of a shortest path between nodes [J]. Information Processing Letters, 1998, 67(1):51-54.
- [8] HERSHBERGER J, SURI S. Vickrey prices and shortest paths: what is an edge worth? [C]//Proceedings of the 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Los Alamitos, USA: IEEE Computer Society, 2001:252-259.
- [9] HERSHBERGER J, SURI S, BHOSLE A. On the difficulty of some shortest path problems [C]//Proceedings of the 20th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2003:343-354.
- [10] XU Y, YAN H. Real time critical edge of the shor-

- test path in transportation networks [C]//3rd International Conference on Theory and Applications of Models of Computation, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2006:198-205.
- [11] 刘明,徐寅峰,杜源江,等. 不完全信息下交通网络的关键路径问题 [J]. 系统工程, 2006,24(12):16-20.
LIU Ming, XU Yinfeng, DU Yuanjiang, et al. Most shortest vital-path problem with incomplete information on traffic network [J]. Systems Engineering, 2006,24(12):16-20.
- [12] DIJKSTRA E W. A note on two problems in connection with graphs [J]. Numerische Mathematics, 1959, 1(5):269-271.

(编辑 苗凌)